

فصل دوم (بخش اول: معادلات درجه دوم)

بخش اول: معادلات درجه دوم

تعریف: معادلات درجه دوم در حالت کلی به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. ($a \neq 0$)

مل معادله درجه دوم: برای مل معادلات درجه دوم چندین روش وجود دارد که به توضیح دو روش آن می پردازیم:

الف) روش تجزیه: در این روش ابتدا معادله را با استفاده از روش های مختلف تجزیه می کنیم و در نهایت تک تک معادلات درجه اول بدست آمده را حل می نماییم.

مثال ۱: معادلات زیر را حل کنید.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x^3 =$$

ب) روش دلتا: در این روش ریشه های معادله (در صورت وجود) از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می آید. که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ است.

تست ۱: اگر عدد یک، ریشه از معادله $x + a = x(x + 1)$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- ۰ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

نکته ۱: برای مل معادله درجه دوم دو حالت خاص زیر را داریم:

الف) اگر $a + b + c = 0$ باشد، در آن صورت جواب های معادله برابر $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ است.

ب) اگر $a + c = b$ باشد، در آن صورت جواب های معادله برابر $x = -1$ و $x = \frac{c}{a}$ است.

مثال ۲: جواب های معادله $3x^2 - x - 2 = 0$ برابر

و همچنین جواب های معادله $5x^2 - 2x - 7 = 0$ برابر

نکته ۲: اگر α و β دو ریشه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، همواره داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}, |\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال ۳: مجموع، حاصل ضرب و تفاضل ریشه های معادلات $5x^2 - 4x - 1 = 0$ ، $x^2 - x - 3 = 0$ را بیابید.

نکته ۳: اگر α و β ریشه های یک معادله دوم باشند، داریم:

$$\alpha^m + \beta^m = S^m - mps, \quad \alpha^p + \beta^p = S^p - pp$$

مثال ۴: اگر α و β ریشه های معادله $\gamma x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، مطلوب است

$$\alpha^p + \beta^p = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$$

$$\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \alpha^m + \beta^m =$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha^p - \beta^p =$$

نکته ۴: الف) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ علامت b را قرینه کنیم، ریشه های معادله قرینه می شوند.

مثال ۵: چون ریشه های معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ برابر هستند، پس ریشه های معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ برابر هستند.

مثال ۶: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن قرینه ریشه های $px^2 - x - 3 = 0$ باشند؟

ب) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جای ضرایب a و c را عوض کنیم ریشه های معادله معکوس می شوند.

مثال ۷: چون ریشه های معادله $3x^2 - 2x - 1 = 0$ برابر هستند پس ریشه های معادله $-1x^2 - 2x + 3 = 0$ برابر هستند.

پ) اگر $a = c$ ، دو ریشه معادله عکس همانند و همچنین اگر $\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$ دوریشه غیر هم علامت هستند.

مثال ۸: ریشه های معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ برابر و هستند که معکوس یکدیگرند.

همچنین چون در معادله $x^2 + px - 3 = 0$ داریم $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ، لذا معادله دارای

تست ۲: معادله $ax^2 + x - a^p = 0, (a \in \mathbb{R})$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۲ هم علامت ۲) ۲ غیر هم علامت ۳) بدون ریشه

ت) اگر $\Delta > 0, \frac{c}{a} > 0$ و الف) $-\frac{b}{a} > 0$ معادله دو ریشه مثبت ب) $-\frac{b}{a} < 0$ معادله دو ریشه منفی دارد.

مثال ۹: معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ دارای، زیرا:

و معادله $2x^2 + 3x + 1 = 0$ دارای، زیرا:

ث) اگر $\Delta < 0$ باشد، علامت معادله همواره هم علامت a است. مثلا مقدار عددی عبارت $x^2 + 2x + 7$ به ازای هر عدد حقیقی همواره است، زیرا در این عبارت

ج) ریشه های معادله $ax^2 + bckx + ck^p = 0$ ، k برابر ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

فصل دوم (بخش اول: معادلات درجه دوم)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

مثال ۱: معادلات درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳ و ۲- برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 8 = 0$ باشند.

ج) اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله به ترتیب برابر S و P باشند، معادله $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود.

مثال ۱: معادلات درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن‌ها به ترتیب برابر $1 \pm \sqrt{3}$ و $2 \pm \sqrt{3}$ باشند.

نکته ۵: برای نوشتن یک معادله جدید بر اساس معادله $ax^2 + bx + c = 0$ که ریشه‌هایش در ارتباط با ریشه‌های این معادله باشند،

کافیست با استفاده از یک تغییر متغیر به معادله مورد نظر برسیم.

مثال ۱: الف) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

الف) یک واحد از ریشه‌های معادله $x^2 + x - 2 = 0$ کمتر باشند.

ب) از معکوس ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ آن سه واحد بیشتر باشند.

ج) عکس و قرینه ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند.

نکته ۶: برای حل معادلات $ax^2 + bx + c = 0$ یا $ax^4 + bx^2 + c = 0$ که در آن u یک عبارت بر حسب x است، مشابه معادلات درجه دوم عمل

می‌کنیم.

مثال ۳: معادله‌های $2(3x-1)^2 + (3x-1) - 3 = 0$ ، $5x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ را حل کنید.

استاد: استاد مهدی جعفری کیا

مبحث: درسیانه تفصیلی فصل دوم ریاضی تجربی پیش دانشگاهی

فصل دوم (بخش اول: معادلات درجه دوم)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

تست ۳: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 6x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) ۲۴

تست ۴: معادله درجه دومی که ریشه های آن ۳ برابر معکوس ریشه های معادله $x^2 - 13x + 1 = 0$ باشد، کدام است؟

- ۱) $x^2 - 9x + 9 = 0$ ۲) $x^2 - 9x + 13 = 0$ ۳) $x^2 + 9x - 13 = 0$ ۴) $x^2 - 9x - 9 = 0$

تست ۵: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 7x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + \alpha^2 + \beta^3 + \beta^2$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

تست های کنکور

تست ۱: اگر هر یک از ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله

(تجربی ۸۶) $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

- ۱) -۱۲ ۲) -۱۲ ۳) -۸ ۴) -۶

تست ۲: اگر $x = 4$ یکی از جواب های معادله $\sqrt{5x - x^2} = x + a$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (تجربی ۸۷) ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد.

فصل دوم (بخش اول: معادلات درجه دوم)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

تست ۳: ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است (تجربی ۸۷) کدام است b؟

- (۱) ۲- (۲) ۱- (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

تست ۴:

- به ازای کدام مقادیر m، از معادله $mx - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

(سراسری ۸۸)

- (۱) $-\frac{2}{3} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ (۴) $2 < m < \frac{3}{2}$

تست ۵:

- به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$ ، $2y + ax + 5 = 0$ ، $y + 3x = a$ متقارب اند؟

(سراسری ۸۸)

- (۱) ۱- (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ نشدنی

تست ۶:

- مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2 + x) - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

(سراسری ۹۰)

- (۱) ۴- (۲) ۲- (۳) ۲ (۴) ۴

تست ۷:

به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می باشد؟

(سراسری ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{9}{5}$ و ۱ (۴) $-\frac{9}{5}$ و ۱-

استاد: استاد مهدی جعفری کیا

مبحث: درسیانه تفصیلی فصل دوم ریاضی تجربی پیش دانشگاهی

فصل دوم (بخش اول: معادلات درجه دوم)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

تست ۱۰: ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کم تر است؟
(تجربی ۹۴) (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

تست ۱۱: به ازای کدام مجموعه ی مقادیر m ، از معادله ی $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟
فارسی ۸۸ (۱) $m \geq 1$ (۲) $m < 2$ (۳) $1 \leq m < 2$ (۴) هیچ مقدار m

تست ۱۲: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ ، فاقد ریشه حقیقی است؟
فارسی ۸۹ (۱) $-2 < m < 5$ (۲) $-2 < m < 4$ (۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

تست ۱۳: - مقادیر تابع $y = x^2 - 4x - 12$ در بازه ی (a, b) کوچک تر از -7 است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟
گزینه ۲ (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶ (۴) ۶/۵

تست ۱۴: - معادله ی $\sqrt{x} - x + 6 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟
گزینه ۲ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست ۵: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، از معادله $x + m\sqrt{x} + m = 1$ ، هیچ جوابی برای x حاصل نمی‌شود؟

(۲) $m > 1$

(۱) \emptyset

(۴) $m < 0$

(۳) $0 < m < 1$

تمرینات کتاب

۱- معادله‌ای درجه دوم بنویسید که جواب‌های آن دو عدد زیر باشند.

(الف) 3 و 4 (ب) $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ (ج) $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$

۲- مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادله $-mx^2 + 3x + m - 1 = 0$

برابر -2 شود.

۳- مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب‌های معادله $2x^2 - 5x + a = 0$ معکوس یکدیگر باشند.

سیس جواب‌های این معادله را بیابید.

۴- معادله سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در 2 و -2 و محور عرض‌ها را در 2 قطع کند.

۵- معادله درجه دوم بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $x^2 + 3x - 5 = 0$ باشد.

فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

بخش دوم: دنباله ها

(۱) تعریف دنباله: دنباله تابعی است که به هر عدد طبیعی، یک عدد مقیسی را نسبت می‌دهد.
 $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto a_n$

نکته ۱: عملیات برخی از دنباله‌ها از یک قانون خاصی پیروی می‌کند که به آن جمله‌ی عمومی دنباله گفته می‌شود و تمام جمله‌های دنباله را می‌توان با توجه به آن قاعده مشخص نمود. مثلاً در دنباله $1, 3, 5, \dots$ جمله‌ی عمومی بصورت $a_n = 2n - 1$ می‌باشد، و هر جمله را می‌توان با توجه به جمله قبل از آن و یا به طور مستقل پیدا کرد.

مثال ۱: جمله‌ی عمومی دنباله‌های $a_n = \frac{2n+1}{n}$ و $b_n = \sqrt{2 + \frac{1}{n}}$ را داریم، سه جمله‌ی اول آن را بنویسید.

(۲) دنباله مسابی (عددی): عملیات این دنباله‌ها از جمع عدد قبلی با یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله‌ها بصورت $a, a+d, a+2d, \dots$ است، که در آن a جمله‌ی اول و d قدر نسبت است.

نکته ۲: قدر نسبت در این دنباله‌ها از رابطه‌ی $d = a_n - a_{n-1}$ (ماسبه) می‌شود. و همچنین جمله‌ی عمومی این دنباله‌ها در حالت کلی به شکل $a_n = a + (n-1)d$ است.

مثال ۲: در دنباله $5, 2, -1, \dots$ قدر نسبت و جمله‌ی a_0 و جمله a_{25} را مشخص کنید.

نکته ۳: اگر a و b و c به ترتیب سه جمله از یک دنباله مسابی باشند، به b واسطه عددی می‌گوییم و داریم $b = \frac{a+c}{2}$. همچنین داریم:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

مثال ۳: در مجموعه اعداد طبیعی عدد 5 واسطه عددی چه اعدادی است؟

نکته ۴: اگر جمله‌ی a_n و a_m از یک دنباله مسابی را داشته باشیم، خواهیم داشت: $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

مثال ۴: اگر در یک دنباله جمله ششم ۱۵ و جمله دهم ۳۴ باشد، قدر نسبت دنباله را بیابید.

تست ۱: اعداد $1-5p, 3p+4, 2p+3$ سه جمله ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

تست ۲: به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه عددی بین دو ریشه حقیقی معادله $m = 0 - 3x + (m^2 - 4)x^2$ است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

تست ۳: تصاعد حسابی به جمله اول 63 و قدر نسبت (-4) چند جمله مثبت دارد؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

نکته ۵: اگر جمله ی a و b دو عدد موقیق باشند و بخواهیم بین این دو عدد n عدد دیگر بکنیم بطوری که جملات حاصل یک دنباله عددی

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

را تشکیل دهند، فوایم داشت:

مثال ۵: بین اعداد ۲۰ و ۳۵ چهار واسطه عددی درج کنید.

تست ۴: بین دو عدد ۷ و ۵۵ به تعداد هفت جمله طوری نوشته شده است که دنباله ی حسابی تشکیل شود، جمله ی وسط کدام است؟

- ۲۹ (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴)

نکته ۶: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم $m+n=p+q$ در آن صورت در هر دنباله مسابی فوایم داشت: $a_m + a_n = a_p + a_q$.

تست ۵: در یک دنباله مسابی جملات هشتم، سیزدهم و شصت و هفتم به ترتیب برابر ۱۱ ، ۳۶ و ۳۰۶ هستند. جمله ۶۲ کدام است؟

- ۲۶۳ (۱) ۲۶۱ (۲) ۲۵۹ (۳) ۲۶۹ (۴)

نکته ۷: مجموع n جمله ی اول در هر دنباله مسابی از رابطه ی $S_n = \frac{n}{2} [a + (n-1)d]$ و $S_n = \frac{n}{2} (a + a_n)$ محاسبه می شود.

فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

امام علی علیه السلام: ((تقوای الهی پیشه کن گروه اندک، و میان خود و فدای فویش مریم نکه دار و نو کم رنگ))

مثال ۴: در دنباله $2, 4, 10, \dots$ مجموع ۱۰ جمله اول و مجموع ۱۴ جمله اول را بیابید.

مثال ۷: پنجم جمله از دنباله $5, 7, 9, \dots$ را جمع کنیم تا مجموع جمله‌ها از ۱۰۰ بیشتر شود.

تست ۴: در یک دنباله عددی مجموع چهار جمله اول ۳۴ و مجموع چهار جمله دوم ۱۴۶ است. مجموع جمله‌ها نهم و دهم کدام است؟

۱۱۰ (۱) ۱۱۲ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۱۹ (۴)

نکته ۸: برای یافتن n جمله اول در یک دنباله مسایه می‌توانیم از ضرب n در جمله وسط استفاده کنیم.

تست ۷: جمله بیستم یک دنباله عددی برابر ۱۰۰ است. مجموع ۳۹ جمله اول را بیابید.

۳۸۰۰ (۱) ۳۹۰۰ (۲) ۳۶۰۰ (۳) ۴۰۰۰ (۴)

نکته ۹: تعداد جمله‌ها بین دو عدد صحیح m و n برابر $m - n + 1$ است.

تست ۸: مجموع اعداد طبیعی فرد بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟

۸۱۴ (۱) ۸۵۲ (۲) ۸۶۷ (۳) ۸۸۴ (۴)

۳) دنباله هندسی: جمله‌ها این دنباله‌ها از ضرب عدد قبلی در یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این

دنباله‌ها بصورت a, aq, aq^2, \dots است. که در آن a جمله اول و q قدر نسبت است.

آدرس سایت: mclass.ir

تهیه کننده: مهدی جعفری کیا

۲۸

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته ۱۰: قدر نسبت در این دنباله ها از رابطه $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ مناسبه می شود. و همچنین جمله ی عمومی این دنباله ها در حالت کلی بشکل $a_n = aq^{n-1}$ است.

مثال ۸: در دنباله $\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \dots$ قدر نسبت و جمله ی ۱۷ام را مشخص کنید.

نکته ۱۱: اگر a و b و c به ترتیب سه جمله از یک دنباله هندسی باشند، به b واسط هندسی می گوئیم و داریم $b^2 = ac$.

نکته ۱۲: اگر جمله a_n و a_m از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، فوایم داشت: $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$.

نکته ۱۳: اگر جمله a و b دو عدد مقیقی باشند و فوایم بین این دو عدد n عدد دیگر بگنجانیم به طوری که جملات حاصل یک دنباله

هندسی را تشکیل دهند، فوایم داشت: $q^{n+1} = \frac{b}{a}$.

نکته ۱۴: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم $m+n = p+q$ ، در آن صورت در هر دنباله مسابی فوایم داشت: $a_m a_n = a_p a_q$.

مثال ۹: بین اعداد ۲ و ۱۲۸ پنج واسط هندسی بگنجانید.

تست ۹: اعداد $a, 2, a-3$ جملات متوالی از دنباله ی هندسی نزولی اند، جمله ی چهارم چند برابر جمله ی دهم آن است؟

۳۲ (۱) ۴۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴)

تست ۱۰: در یک تصاعد هندسی $a_5 = 2a_6$ جمله اول کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

تست ۱۱: در یک تصاعد هندسی صعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۱) ۲۵ (۲) ۵ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴)

تست ۱۲: اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله متوالی از تصاعد هندسی اند. واسطه عددی بین a و b کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

((مسئولیت زندگیان را به عهده بگیرید، بدانید فقط شما هستید که می‌توانید خودتان را به جایی که می‌خواهید برسانید، نه هیچکس دیگری))

نکته ۱۵: مجموع n جمله اول در هر دنباله هندسی از رابطه $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ بدست می‌آید.

مثال ۱۰: مجموع ۶ جمله اول از دنباله‌های $3, -15, +45, \dots$ ، $8, 14, 2, \dots$ را بیابید.

تست ۱۳: در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$
 (۲) $\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{5}{32}$
 (۴) $\frac{1}{4}$

تست ۱۴: تصاعد هندسی $\dots, \frac{1}{2}, x, 2$ غیر نزولی است، مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- (۱) $\frac{41}{32}$
 (۲) $\frac{21}{16}$
 (۳) $\frac{11}{8}$
 (۴) $\frac{23}{16}$

تست ۱۵: در یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ حاصل $\frac{a_7 a_7}{a_2^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$
 (۲) ۱۶
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) ۴

نکته ۱۶: اگر در دنباله هندسی $-1 < q < 1$ باشد و بخواهیم مجموع همه جملات دنباله را بیابیم، از رابطه $S = \frac{a}{1-q}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۱: مجموع کل جملات دنباله هندسی $\dots, \frac{4}{3}, -4, 12, \dots$ ، $9, 3, 1, \dots$ را بیابید.

۱۴) انواع دنباله ها:

الف- دنباله های یکنوا (صعودی یا نزولی): دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هرگاه $\forall n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m$ و همچنین دنباله $\{a_n\}$ نزولی است هرگاه $\forall n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m$. مثلا دنباله های $\{n\}, \{n^p + 1\}, \{\log n\}, \{p^n\}$ همگی صعودی و دنباله های $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}, \{-n\}$ نزولی هستند و همچنین دنباله $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) هم صعودی و هم نزولی است.

نکته ۱۷: دنباله های متناوبی نظیر $\{\sin n\}, \{(-1)^n\}$ نه صعودی و نه نزولیند.

نکته ۱۸: اگر در دنباله $\{a_n\}$ یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ یا $a_{n+1} - a_n > 0$ و یا $a'_n \geq 0$ باشد، دنباله صعودی است.

تست ۱۶: دنباله $u_n = -n^p - pn + p$ چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی بعد نزولی (۴) ابتدا نزولی بعد صعودی

ب- دنباله های کراندار و بی کران: اگر عدد حقیقی a طوری باشد که در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم: $\forall n \in \mathbb{N} -a \leq a_n \leq a$. در این صورت این دنباله کراندار می باشد و کران بالا و پایین آن به ترتیب a و $-a$ هستند. در غیر این صورت بی کران می باشد. مثلا دنباله های

$\{\sin n\}, \{(-1)^n\}$ کراندار و دنباله های $\{n^p - 1\}$ و $\left\{\frac{-n+p}{p}\right\}$ بی کران هستند (اولی فقط کران پایین و دومی فقط کران بالا دارد).

نکته: دنباله $\{a_n\}$ کراندار است اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ یک عدد حقیقی شود.

تست ۱۷: دنباله $\left\{\frac{n^p}{n^p + 1}\right\}$ چگونه است؟

(۱) فقط از بالا کراندار (۲) فقط از پایین کراندار (۳) نه کراندار از بالا و نه کراندار از پایین (۴) کراندار

تست ۱۸: کدام دنباله زیر کران بالا و پایین ندارد؟

(۱) $\left\{\sin \frac{n\pi}{p}\right\}$ (۲) $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}$ (۳) $\{p^n\}$ (۴) $\{n^p (-1)^n\}$

تست ۱۹: کدام گزینه فقط از پایین کراندار است؟

(۱) $a_n = \cos \frac{\pi}{n+1}$ (۲) $b_n = \log \frac{1}{n+1}$ (۳) $c_n = \left[\frac{(-1)^n}{n+1}\right]$ (۴) $d_n = \frac{n^p}{n+1}$

تست ۲۰: کدام دنباله صعودی و از بالا و پایین کران دار است؟

$$U_n = \left\{ \frac{n^2 + 2}{n^2 + 4} \right\} \quad (۴) \quad U_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\} \quad (۳) \quad U_n = \left\{ \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right\} \quad (۲) \quad U_n = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (۱)$$

ج- دنباله های همگرا و واگرا: اگر عدد دقیقی a طوری باشد که در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، در این صورت این دنباله همگرا به عدد L می باشد. در غیر این صورت واگرا می باشد.

مثلا دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ ، $\left\{ \frac{n+p}{n} \right\}$ به ترتیب به اعداد 0 و 1 همگرا هستند ولی دنباله های $\{n+\varphi\}$ ، $\{\sin n\}$ ، $\{(-1)^n\}$ واگرا هستند.

نکته ۱۹: دنباله های متناوبی نظیر $\{(-1)^n\}$ چون مدام بین دو یا چند ± 1 جابه جا می شود واگراست. همچنین در دنباله های نظیر $\left\{ \frac{n^p + 1}{n} \right\}$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p + 1}{n} = \infty$ لذا واگرا هستند.

نکته ۲۰: هر دنباله همگرا، کراندار است، ولی عکس این موضوع صمیم نمی باشد. مثلا دنباله $\left\{ \frac{3n^p - 1}{4n^p + 3n} \right\}$ چون همگرا به عدد $\frac{3}{4}$ است، لذا کراندار نیز است، اما دنباله $\{(-1)^n\}$ با اینکه کراندار است، ولی همگرا نمی باشد.

نکته ۲۱: برای تشخیص همگرایی دنباله های بشکل $\left\{ \frac{an^p + bn^{p-1} + \dots + k}{a'n^q + b'n^{q-1} + \dots + k'} \right\}$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^p + bn^{p-1} + \dots + k}{a'n^q + b'n^{q-1} + \dots + k'} = \begin{cases} 0 & p < q \\ \frac{a}{a'} & p = q \\ \infty & p > q \end{cases}$

مثال ۱: دنباله $\left\{ \frac{3}{4n-1} \right\}$ و $\left\{ \frac{pn}{-3n+5} \right\}$ و $\left\{ \frac{1-x^p}{x^p + 400} \right\}$ به چه اعدادی همگرا هستند؟

نکته ۲۲: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = \begin{cases} 0 & |C| < 1 \\ 1 & C = 1 \\ \infty & |C| > 1 \end{cases}$ ، همچنین اگر $C = -1$ ، دنباله نوسانی واگرا می باشد.

تست ۲۱: دنباله $\left\{ \left(\frac{5n-3}{3n+1} \right)^n \right\}$ به چه عددی همگراست؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) -1 (۳) 0 (۴) واگرا

نکته ۲۳: داریم: $\frac{u^p}{p} \sim u^p - 1$ ، $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$ ، $\tan u \sim u$ ، $\sin u \sim u$ ، $u \rightarrow 0 \Rightarrow$

فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

تست ۲۲: دنباله $\left\{ \frac{pn^p}{p-qn} \times \sin \frac{p}{n} \right\}$... $a_n =$

(۱) واگراست. (۲) همگرا به $\frac{p}{4}$ (۳) همگرا به $-\frac{p}{4}$ (۴) همگرا به $-\frac{p}{p}$

تست ۲۳: کدام گزینه نزولی و همگرا است؟

(۱) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (۲) $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (۳) $u_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ (۴) $v_n = \cos \frac{\pi}{n}$

نکته ۱۴: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{an^p + bn^q + c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \left(n + \frac{b}{pa}\right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{an^p + bn^q + cn + d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \left(n + \frac{b}{pa}\right)$

مثال ۱۳: اگر دنباله $a_n = \sqrt{n^2 + bn - 1} - n + 4$ همگرا به b باشد، b کدام است؟

تست ۲۴: دنباله $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{p}$ (۴) صفر

نکته ۲۵: اگر $a > b$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n}$

(آزاد تجربی - ۸۲)

تست ۲۵: دنباله $\left\{ \frac{3^{2n+2} + 8^{n+1}}{3^{2n+1} + 8^n} \right\}$

(۲) همگرا به ۸ است.
(۴) واگرا است.

(۱) همگرا به ۲ است.
(۳) همگرا به ۴ است.

"راه حل صحیح موفقیت این است که اشتیاق شما به پیروزی، بیشتر از ترس شما از شکست، باشد"

نکته ۲۶: اگر n عددی طبیعی و $a > 0, a \neq 1$ و $b > 0$ و $c > 1$ در حالت کلی داریم: $n^n > n! > c^n > n^b > \log_a n$

تست ۲۶: کدام یک از دنباله های زیر نزولی است؟

$$(1) \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\} \quad (2) \left\{ \frac{n!}{3^n} \right\} \quad (3) \left\{ \frac{n^2}{n^2+1} \right\} \quad (4) \left\{ \frac{1}{n!} \right\}$$

تست ۲۷: کدام دنباله به صفر همگراست؟

$$(1) \left\{ \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n-1} \right\} \quad (2) \left\{ \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \right\} \quad (3) \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{9n+1}} \right\} \quad (4) \left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$$

تست ۲۸: - کدام دنباله صعودی و از بالا و پایین کران دار است؟

$$(1) U_n = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (2) U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+1} \right\} \quad (3) U_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\} \quad (4) U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+4} \right\}$$

تست ۲۹: - کدام یک از دنباله های زیر همگراست؟

$$(1) a_n = \frac{n^2}{2n+1} \quad (2) a_n = \frac{(-1)^n}{2} \quad (3) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (4) a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2$$

تست ۳۰: - دنباله $a_n = \left\{ \left[3 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] \right\}$ از نظر همگرایی چگونه است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) همگرا به صفر (۲) همگرا به ۲ (۳) همگرا به ۳ (۴) واگرا

تست ۱۳: - کدام یک از دنباله های زیر همگرا است؟

$$a_n = \frac{2n}{n^2 + 17} \quad (4)$$

$$a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{2} \quad (2)$$

$$a_n = 2(-1)^n \quad (1)$$

تست های کنکور

دنباله های عددی

تست ۱: مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟
(سراسری ۸۱) (۱) ۲۲۲۰ (۲) ۲۴۵۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۲۵۵۰

تست ۲: در یک تصاعد عددی جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه $\frac{1}{3}$ کمتر است مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟
(سراسری ۸۲) (۱) $\frac{22}{5}$ (۲) ۲۵ (۳) $\frac{27}{5}$ (۴) ۳۰

تست ۳: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱، کدام است؟
(سراسری ۸۵) (۱) ۸۱۶ (۲) ۸۵۲ (۳) ۸۶۷ (۴) ۸۸۴

تست ۴: - در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله این تصاعد، صفر است؟
(سراسری ۸۸) (۱) 9 (۲) 10 (۳) 11 (۴) 12

فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

تست ۵: جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

(سراسری ۹۳)

$\frac{5}{3}$ (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴)

تست ۶: مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-2)}{4}$ است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

(فاز ۸۹)

132 (۱) 140 (۲) 148 (۳) 154 (۴)

تست ۷: در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

(فاز ۹۱)

$\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

دنباله های هندسی

تست ۸: در یک تصاعد عددی جمله nام به صورت $a_n = \frac{3}{7}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این تصاعد کدام است؟

(سراسری ۸۹)

90 (۱) 105 (۲) 120 (۳) 135 (۴)

تست ۹: در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟

(سراسری ۹۰)

4 (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴)

تست ۱۰: به ازای یک مقدار x، اعداد $x^2 - 2$ ، $3x$ ، $x^2 + 4$ ، به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

(سراسری ۹۳)

$\frac{117}{16}$ (۱) $\frac{125}{16}$ (۲) $\frac{63}{4}$ (۳) $\frac{127}{8}$ (۴)

فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

www.riazisara.ir

جزوه کنکوری ریاضیات عمومی چهارم تجربی

تست ۱۱: در دنباله‌ی هندسی ...، ۱، ۲، ۴، ... مجموع چهارده جمله‌ی اول، چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟
 (فارغ ۹۰) ۶۵ (۱) ۶۳ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۲۹ (۴)

تست ۱۲: در یک دنباله هندسی، جمله‌ی دوم و دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟
 (فارغ ۹۲) ۲ + √۳ (۱) ۵ + ۲√۳ (۲) ۵ + ۴√۳ (۳) ۷ + ۴√۳ (۴)

تست ۱۳: به ازای یک مقدار x، اعداد x، ۸ - x، x + ۸ و x + ۱۲، به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی‌اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟
 (فارغ ۹۳) ۱۸ (۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

دنباله‌های صعودی نزولی و ...

تست ۱۴: اگر $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ، آنگاه دنباله با جمله عمومی U_n چگونه است؟
 (سراسری ۸۳) ۱) کراندار - صعودی ۲) کراندار - نزولی ۳) بی‌کران - صعودی ۴) بی‌کران - نزولی

تست ۱۵: دنباله‌ی $u_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ برای $n \geq 2$ چه نوع دنباله‌ای است؟
 (سراسری ۸۴) ۱) صعودی - کراندار از بالا و پایین ۲) نزولی - کراندار از بالا و پایین ۳) صعودی - فقط از پایین کراندار ۴) نزولی - فقط از بالا کراندار

برای بازدید از سایت همکلاسی (Hamkelasi.ir) روی همین کادر کلیک کنید

مبحث : درسنامه تفصیلی فصل دوم ریاضی تجربی پیش دانشگاهی

استاد : استاد مهدی جعفری کیا